

ТЕОРИЈА БРОЈЕВА И ПОЛИНОМА

Задаци за домаћи (I део) - 2017/2018 година

- Доказати да за сваки природан број n важи:
 - $27 \mid 10^n + 18n - 1$
 - $9 \mid 4^n + 15n - 1$
- Доказати да $900 \mid 6 \cdot 16^{n+1} + 4^{2n+1} - 3 \cdot 4^{n+3} - 2 \cdot 4^{n+1} + 100$ важи за сваки природан број n .
- Нека су x и y цели бројеви такви да је $29x + 18y$ дељив са 17. Доказати да је број $23x + 9y$ дељив са 17. Да ли број $11x + 8y$ мора бити дељив са 17?
- Одредити све природне бројеве n за које је разломак $\frac{27n + 17}{9n + 2}$ цео број.
- Доказати да за природне бројеве a, b и c важи $[a, b, c](a, b)(b, c)(c, a) = abc(a, b, c)$.
- Доказати да за природне бројеве m и n важи $\varphi(mn)\varphi((m, n)) = (m, n)\varphi(m)\varphi(n)$.
- Одредити све природне бројеве такве да је $3\tau(n) = n$.
- Одредити све природне бројеве n такве да је $\tau(n) = 6$, $\sigma(n) = 3500$.
- Нека су a и b узајамно прости природни бројеви. Доказати да је највећи заједнички делилац за бројеве $a - b$ и $a^2 + ab + b^2$ или 1 или 3.
- Доказати да се разломак $\frac{a + b}{c + d}$ не може скратити ако је $ad - bc = 1$ или $ad - bc = -1$.
- Наћи све просте бројеве p за које су бројеви $p^2 + 4$ и $p^2 + 6$ прости.
- Ако су p и $2p^2 + 1$ прости, доказати да је и $3p^2 + 2$ такође прост.
- Ако је $11\dots 1$ прост, тада је и број цифара тог броја прост.
- Одредити цифре a и b тако да је број $\overline{73840a59b1}$ дељив са 91.
- Одредити последње две цифре броја:
 - 11^{2017}
 - 11^{121}
 - $11^{11^{11}}$
 - $((11^{11})^{11})^{11}$.
- Одредити остатак при дељењу броја $1111^{22} + 2222^{33} + 3333^{44} + 4444^{55} + 5555^{66}$ са 13.
- Нека су a, b и c природни бројеви већи од 1, такви да је $(a, b) = (b, c) = (c, a) = 1$ и $\{x_1, x_2, \dots, x_a\}$, $\{y_1, y_2, \dots, y_b\}$ и $\{z_1, z_2, \dots, z_c\}$, редом, потпуни систем остатака по модулу a, b и c . Доказати да скуп $\{x_i bc + y_j ca + z_k ab \mid 1 \leq i \leq a, 1 \leq j \leq b, 1 \leq k \leq c\}$ чини потпуни систем остатака по модулу abc .
- Доказати да $3^{n+1} \mid 13^{3^n} - 1$ важи за сваки природан број n .
- Одредити остатак при дељењу броја $518^{27^{2017}}$ са 15.
- Доказати да $6^{n+1} \mid 7^{6^n} - 1$ за сваки природан број n .
- Доказати да су за произвољан природан број k последњих $2k$ цифара броја $5^{2^{2k+1}+2k} - 25^k$ нуле.
- Ако су a и b узајамно прости цели бројеви, доказати да $252 \mid (a^6 + b^6 - 1)(a^6 + b^6 - 2)$.
- Нека је p непаран прост број који не дели број a . Доказати да је тачно један од бројева $A = a^{1+2+\dots+(p-1)} - 1$ и $B = a^{1+2+\dots+(p-1)} + 1$ дељив са p .
- Доказати да је за сваки природан број n и сваки прост број p , број $1 + \sum_{k=1}^{p-1} k^{n(p-1)}$ дељив са p .
- Нека је p непаран прост број и k цео број такав да је $0 < k < p$. Доказати да је $(k-1)!(p-k)! \equiv_p (-1)^k$.
- Нека су p и $p+6$ прости бројеви. Доказати да важи $80 \cdot 3^{p+5} + 3^4 \cdot 6! \cdot (p-1)! + (p+4)! \equiv_{p(p+6)} 0$.
- Доказати да је за сваки непаран прост број p бројилац m разломка
$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1}$$
 дељив са p .